جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
دهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۷۸

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۸۰	۱۰	۳۵

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۳۵ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

سؤالات پنج گزینه‌ای

۱- نگهبـانـی در یک شرکت با سه کارمند به نام‌های علی، حسین و مجید کار می‌کند. نگهبان باید هر روز سر کار حاضر شود، مگر روزی که هر سه کارمند در مرخصی باشند. می‌دانیم که:

علی یک روز در میان به مرخصی می‌رود و امروز هم سرکار است حسین ۵ روز کار می‌کند و دو روز به مرخصی می‌رود و دیروز اولین روز کار او بعد از یک مرخصی بوده است. مجید سه روز کار می‌کند و یک روز به مرخصی می‌رود. او دیروز در مرخصی بوده. اولین روز تعطیلی نگهبان چند روز دیگر است؟

الف) ۴ ب) ۷ ج) ۱۱

د) ۱۹ هـ) نگهبان هیچ‌گاه تعطیلی نخواهد داشت

۲- عددهای ۱ تا ۷۸ را به ترتیب حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره‌یی نوشته‌ایم. عدد ۱ را به عنوان عدد جاری انتخاب کرده و عملیات زیر را آنقدر تکرار می‌کنیم که تنها یک عدد بر روی دایره باقی بماند:

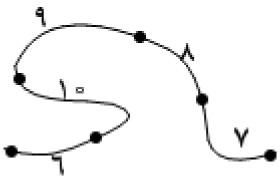
اگر عدد جاری مساوی x باشد، آن را از روی دایره حذف، به هر یک از x عدد بعدی (در جهت عقربه‌های ساعت) بر روی دایره یک واحد اضافه، و عدد $x+1$ ام پس از آن را به عنوان عدد جاری انتخاب می‌کنیم.

توجه داشته باشید که اگر تعداد عددهای باقی‌مانده بر روی دایره از x کم‌تر باشد، ممکن است به یک یا چند عدد بیش از یک واحد اضافه شود.

عددی که در نهایت بر روی دایره می‌ماند، چه باقی‌مانده‌ای بر ۵ دارد؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۳- شکل روبرو ۵ شهر و جاده‌های بین آن‌ها را نشان می‌دهد. عددهای بین شهرهای متوالی، نشان‌گر مسـافـت بـیـن آنـهاست. می‌خواهیم پمپ بنزینی بر روی جاده یا در یکی از شهرها احداث کنیم به طوری که مجموع مسافت شهرهای مختلف تا پمپ بنزین که آن را y می‌نامیم حداقل باشد. جزء صحیح y چند است؟ (جزء صحیح عدد x، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نباشد.)



الف) ۶۳ ب) ۶۹ ج) ۷۰ د) ۷۶ هـ) ۹۲

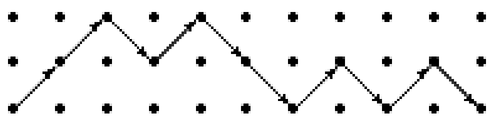
۴- ده نقطِ متمایز a_1، a_2، ...، a_{10} بر روی صفحه‌ای قرار دارند به طوری که هیچ سه‌تایی از آن‌ها روی یک خط نیستند. برای هر سه عدد متمایز i، j، k مجموع تمام زاویه‌های $\angle a_i a_j a_k$ به طوری که $\angle a_i a_j a_k < 180^\circ$ چند درجه است؟

الف) ۱۸۲۰۰ ب) ۱۹۸۰۰ ج) ۲۱۶۰۰ د) ۳۳۶۰۰ هـ) ۴۳۲۰۰

۵- به چند طریق می‌توان تعدادی از خانه‌های غیر مجاور در یک صفحه‌ی 4×2 را علامت زد؟ (دو خانه مجاور هستند اگر در یک ضلـع مشترک باشند.)

الف) ۱۷ ب) ۲۶ ج) ۳۴ د) ۴۱ هـ) ۵۴

۶- شکل روبرو یک جدول 11×3 با ۳۳ نقطه است. می‌خواهیم با استفاده از حرکت‌های مورب (مانند شکل روبرو) از نقطه‌ی گوشه‌ی سمت چپ و پایین به نقطه‌ی گوشه‌ی سمت راست و پایین برویم. توجه کنید که با هر حرکت مورب فقط می‌توان به سمت راست شکل رفت. این کار به چند طریق ممکن است؟

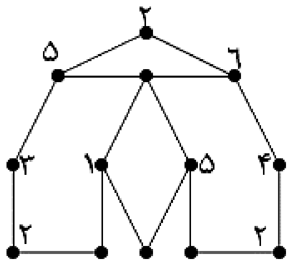


الف) $3^2 \times 2^4$ ب) $3 \times \binom{10}{5}$ ج) 2^5 د) $\binom{10}{5}$ هـ) 2^4

۷- مهدی عدد منفی x از مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۳۵ را انتخاب می‌کند. مریم می‌خواهد با تعدادی سؤال از عدد x آگاه شود. مریم در هر مرحله دو عدد a و b را با فرض $1 \le a < b \le 53$ انتخاب می‌کند. اگر $x = b$ یا $x = b$، مهدی مقدار x را به مریم می‌گوید و کار تمام است. در غیر این صورت مهدی یکی از سه جواب زیر را به مریم می‌دهد که عدد انتخابی او کوچک‌تر از a، بین a و b، یا بزرگ‌تر از b است. مریم با چند سؤال حتماً می‌تواند عدد مهدی را پیدا کند؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ هـ) ۷

۸- شکل روبرو ۱۳ نقطه را نشـان می‌دهد که توسط ۱۶ پاره‌خط به هم متصـل شده‌اند. در ابتدا برای هر نقطه یک عدد طبیعی به عنوان برچسب آن نقطه در نظر گرفته شده است. پس از آن در هر مرحله برای هر نقـطه، از بین نقاط متصل به آن، نقطه‌ای که بزرگترین و نقطه‌ای که کوچکتـرین برچسـب را در مرحله‌ی قبل داشته است در نظر گرفته، مجموع برچسب آن دو را به عنـوان برچسب آن نقطه در آن مرحله قرار می‌دهیم. در شکل داده شده، برچسب بعضـی از نقـطه‌ها در ابتدا بر روی آن‌ها نشان داده شده است. در مورد مجموع برچسب بقیه نقاط در انتهای مرحله‌ی سوم چه می‌توان گفت؟



الف) زوج است و بر ۳ بخش‌پذیر است. ب) فرد است و بر ۳ بخش‌پذیر است.

ج) زوج است و بر ۳ بخش‌پذیر نیست. د) عدد اول است.

هـ) احتمال درستی هر کدام از چهار مورد فوق وجود دارد.

۹- آزمونی شامل ۴۰ پرسش ۵ گزینه‌یی است. در این آزمون هر پاسخ درست ۴ نمره‌ی مثبت، هر پاسخ نادرست ۱ نمره‌ی منفی، و هر پرسش بدون پاسخ نمره‌ی صفر دارد. کم‌ترین تعداد شرکت‌کنندگان در این آزمون چقدر باشد تا مطمئن شویم که حداقل دو نفر نمره برابر می‌گیرند؟

الف) ۱۵۶ ب) ۱۹۱ ج) ۱۹۴ د) ۱۹۶ هـ) ۲۰۱

۱۰- ۵ تیم فوتبال در یک تورنمنت به صورت دوره‌یی با یکدیگر مسابقه داده‌اند. هر باخت، مساوی، و برد به ترتیب صفر، یک، و سه امتیاز دارد. اگر بـدانـیـم کـه هـر دو تیم با هم یک مسابقه برگزار کرده‌اند و نیز بدانیـــم که پس از پایان تورنمنت تیـم اول ۹ و تیـم دوم ۷ امتیاز کسب کرده‌اند، تیم چهارم حداکثر چند امتیاز کسب کرده است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ هـ) ۷

۱۱- یک ماشین محاسبه‌گر یک حافظه‌ی داخلی به نام M دارد. این ماشین می‌تواند با انجام دستورهای زیر یک عبارت را محاسبه کند:

Add X: مقدار X را با مقدار M جمع و حاصل را در M ذخیره می‌کند.

Mul X: مقدار X را در مقدار M ضرب و حاصل را در M ذخیره می‌کند.

در دستورهای فوق X می‌تواند یک عدد صحیح یا یک متغیر باشد. فرض کنید مقدار M در ابتدا صفر است. برای مثال، دستورهای زیر، از راست به چپ، عبارت $ax + 5$ را محاسبه کنید: $Add\ a$، $Mul\ x$، $Add\ 5$.

کدام یک از عبارت‌های زیر با این ماشین قابل محاسبه نیست؟

الف) $ax^2 + bx + c$ ب) $(a+b)xy + ya$ ج) $(ax+by)(a+b)$

د) $3x^5 + 1$ هـ) همه‌ی این عبارت‌ها را می‌توان محاسبه کرد.

۱۲- اگر گزینه‌های زیر درباره‌ی گزینه‌های همین سؤال باشند و بدانیم که دقیقاً یک گزینه درست است، گزینه‌ی درست کدام است؟

الف) اگر گزینه‌ی «ب» درست باشد، گزینه‌ی «د» نادرست است.
ب) گزینه‌ی «ب» درست است.
ج) اگر یکی از گزینه‌های «الف» یا «هـ» درست باشد، گزینه‌ی «د» درست است.
د) گزینه‌های «الف» و «ب» درست هستند.
هـ) هیچ کدام از گزینه‌های بالا درست نیست.

۱۳- به چند حالت می‌توان از یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی به ترتیب سه زیر مجموعه‌ی A_1، A_2 و A_3 را انتخاب کرد به طوری که $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$؟ ($A_i$ ها لزوماً متمایز نیستند.)

الف) $۲^{۱۰}$ ب) $۲^{۱۵}$ ج) $۳^{۱۰}$ د) $۲^{۲۰}$ هـ) $۷^{۱۰}$

۱۴- یکان یک عدد k رقمی ۷ است. می‌دانیم اگر یکان این عدد را از سمت راست عدد برداریم و در سمت چپ آن بگذاریم، عدد ما ۵ برابر می‌شود. k حداقل چند است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۱۰

۱۵- تعداد رشته‌هایی به طول ۱۰ متشکل از A، T، C و G را بیابید که در آن‌ها A و T مجاور هم نباشند و C و G نیز مجاور هم نباشند.

الف) ۲۰۴۸ ب) $۴^{۹}$ ج) $۴^{۱۰} - ۴ \times ۱۰ \times ۳^{۸}$
د) ۱۰۲۴ هـ) $۴^{۶}$

۱۶- ارزش یک عدد $\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ در مبنای ۱۰- برابر است با:

$$a_5 \times (-10)^5 + a_4 \times (-10)^4 + \ldots + a_1 \times (-10) + a_0$$

تعداد اعداد یک رقمی تا ۶ رقمی در مبنای ۱۰- که ارزش آن‌ها منفی است، چند تاست؟ (برای اعدادی که کم‌تر از ۶ رقم دارند، رقم‌های سمت چپ را صفر در نظر بگیرید.)

الف) ۱۰۱۰۱۰ ب) ۸۱۹۰۰۰ ج) ۵۰۰۰۰۰ د) ۵۰۹۰۹۰ هـ) ۹۰۹۰۹۰

۱۷- به چند طریق می‌توان اعداد ۰ تا ۱ را در خانه‌های یک جدول ۱۰×۱۵ قرار داد به طوری که مجموع هر ۴ عدد متوالی در یک سطر یا یک ستون عددی زوج باشد؟

الف) صفر ب) ۵۱۲ ج) $۲^{۱۶}$
د) $\binom{15}{4}\binom{10}{4}$ هـ) $\dfrac{2^{150}}{\binom{15}{4}\binom{10}{4}}$

۱۸- ۸ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. به چند طریق می‌توان این نقطه‌ها را دو به دو به هم متصل کرد. به طوری که هیچ دو وتری از ۴ وتر حاصل، همدیگر را قطع نکنند؟ (وتر یک دایره پاره‌خطی است که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل می‌کند.)

الف) ۸ ب) ۱۴ ج) ۱۶ د) ۱۸ هـ) ۲۴

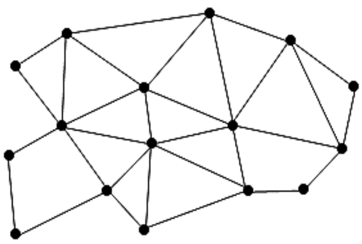
۱۹- از دو عدد دودویی A و B، عدد دودویی $C = A \oplus B$ را به این صورت به دست می‌آوریم: اگر رقم‌های i ام A و B یکسان باشند، رقم i ام C برابر صفر و در غیر این صورت برابر ۱ است (در سمت چپ هر عدد به اندازه‌ی کافی می‌توان رقم صفر اضافه کرد.) مثلاً $۰۰۱۰۰ \oplus ۱۱۰ = ۰۰۰۱۰$. حال بر روی عدد دودویی x عمل زیر را انجام می‌دهیم: x را به دو قسمت دلخواه $x_{۱}$ $x_{۲}$ تقسیم می‌کنیم و x را برابر $x_{۱} \oplus x_{۲}$ قرار می‌دهیم. مثلاً اگر $x = ۱۱۰۰۰۱۰۰$، بر اساس یک حالت از تقسیم x داریم: $x_{۱} = ۱۱۰$ و $x_{۲} = ۰۰۱۰۰$. یک عدد دودیی را «جالب» می‌گوییم اگر بتوان با تکرار عمل بالا آن را به ۱ تبدیل کرد. چند عدد دودیی به طول ۱۰ «جالب» است؟ (رقم‌های سمت چپ یک عدد دودیی می‌تواند صفر باشد.)

الف) ۳۲ ب) ۱۰۲۴ ج) ۵۱۱ د) ۱۰۲۳ هـ) ۵۱۲

۲۰- می‌خواهیم تعدادی مهره‌ی ۱×۲ را در یک جدول ۱۲×۱ بچینیم به طوری که هر مهره دقیقاً روی دو خانه‌ی مجاور قرار می‌گیرد و دیگر نتوانیم هیچ مهره‌یی روی جدول قرار دهیم. به چند طریق این کار ممکن است؟

الف) ۱۹ ب) ۲۰ ج) ۲۱ د) ۲۲ هـ) ۲۳

۲۱- درجه‌ی یک رأس در گراف برابر تعداد یال‌هایی از گراف است که به آن متصل هستند. در گراف مقابل به هر رأس، عددی برابر مجموع درجه‌های همسایه‌های آن رأس نسبت می‌دهیم. فرض کنید مجموع این اعداد برابر A شود. در گام بعدی روی هر یال یک رأس جدید اضافه می‌کنیم و دوباره برای هر رأس، همان عمل را انجام می‌دهیم. مجموع اعداد جدید را B می‌نامیم. $B - A$ چند است؟



الف) ۳۰ ب) ۶۰ ج) ۶۲ د) ۱۲۰ هـ) ۱۲۴

۲۲- یک شرکت بشکه‌هایی از چهار ماده‌ی شیمیایی مختلف به نام‌های A، B، C و D تولید و در انبارهای خود ذخیره می‌کند. این شرکت ۴ انبار دارد که در هر انبار ۴ بشکه از انواع A، B، C و D موجود است (از هر ماده یک بشکه). این مواد شیمیایی در صورتی که با هم مخلوط شوند، خطرناک هستند. به همین دلیل شرکت تصمیم دارد بشکه‌ها را بین این انبارها طوری جابه‌جا کند که در نهایت هر انبار دارای ۴ بشکه از این نوع ماده‌ی شیمیایی باشد. برای این کار از یک کامیون استفاده می‌شود. این کامیون می‌تواند در هر بار جابه‌جایی حداکثر ۲ بشکه را از یک انبار به یکی دیگر از انبارهای شرکت انتقال دهد. حداقل با چند بار جابه‌جایی می‌توان این کار را انجام داد؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ هـ) ۱۰

۲۳- تعدادی عدد طبیعی متفاوت داده شده‌اند که مجموعشان برابر ۱۳ می‌باشد. بیش‌ترین مقدار حاصل ضربشان چه‌قدر است؟

الف) ۴۲ ب) ۶۰ ج) ۷۲ د) ۷۵ هـ) ۸۰

۲۴- نقطه‌ی (X,Y) داده شده است. هر بار می‌توانیم به مقدار X یا به مقدار Y یک واحد اضافه کنیم و به نقطه‌ی جدید (X',Y') برویم. می‌خواهیم با تکرار عمل بالا از نقطه‌ی (۱,۱) به نقطه‌ی (۵,۵) برسیم. برای این کار باید ۸ بار عمل فوق را انجام دهیم و از ۷ نقطه‌ی میانی بگذریم، یعنی

$$(۱,۱) \to (x_{۱},y_{۱}) \to \dots \to (x_{۷},y_{۷}) \to (۵,۵).$$

می‌خواهیم این نقاط را طوری انتخاب کنیم که $x_{۱} \times x_{۲} \times \dots \times x_{۷} \times y_{۱} \times y_{۲} \times \dots \times y_{۷}$ ماکزیمم باشد. این مقدار ماکزیمم در کدام بازه قرار دارد؟

الف) بین ۱۰۰,۰۰۰ و ۱,۰۰۰,۰۰۰
ب) بین ۱,۰۰۰,۰۰۰ و ۵,۰۰۰,۰۰۰
ج) ۵,۰۰۰,۰۰۰ و ۲۰,۰۰۰,۰۰۰
د) بین ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ و ۶۰,۰۰۰,۰۰۰
هـ) بیش از ۶۰,۰۰۰,۰۰۰

۲۵- دنباله‌یی از اعداد ۱ تا ۹ داده شده است. روی این دنباله الگوریتم زیر را انجام می‌دهیم. ابتدا ۳ عنصر اول دنباله را مرتب می‌کنیم. بعد از آن عناصر سوم و چهارم و پنجم را مرتب می‌کنیم. بعد عناصر پنجم و ششم و هفتم و در نهایت عناصر هفتم و هشتم و نهم را مرتب می‌کنیم. برای چه تعداد از جایگشت‌های اعداد یک تا نه دنباله‌یی که با این روش به دست می‌آید، مرتب است؟

الف) ۸۱ ب) ۵۱۲ ج) ۱۰۲۴ د) ۱۲۹۶ هـ) ۲۵۴۲

۲۶- ۷۰۰ سکه را در صد ستون ۷تایی قرار داده‌ایم. از هر ستون که حداقل ۳ سکه دارد، ۲ سکه برمی‌داریم، یکی را دور می‌اندازیم و دومی را روی ستون سمت چپ قرار می‌دهیم (در مورد سمت چپ‌ترین ستون، سکه‌ی دوم را نیز دور می‌اندازیم). این کار را آنقدر انجام می‌دهیم تا هیچ ستونِ ۳ سکه‌یی و بیش‌تر نداشته باشیم. در پایان مجموعاً در همه‌ی صد ستون چند سکه باقی‌مانده است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۱۹۷ ج) ۱۹۸ د) ۱۹۹ هـ) ۲۰۰

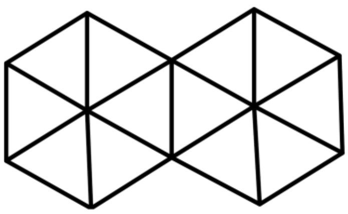
۲۷- رقم‌های یک سیستم عددنویسی باستانی عبارتند از: X با ارزش ۱۰، Y با ارزش ۹، V با ارزش ۵، U با ارزش ۴، I با ارزش ۱. هر عدد در این سیستم، از کنار هم قرار گرفتن تعدادی از ارقام فوق تشکیل می‌شود به‌طوری‌که ابتدا ارقام X و Y به‌ترتیب دلخواه، سپس ارقام U و V به ترتیب دلخواه، و در نهایت ارقام I قرار می‌گیرند. مثلاً:

$$YXII = ۹ + ۱۰ + ۱ + ۱ = ۲۱ \quad ، \quad VVUVII = ۵ + ۵ + ۴ + ۵ + ۱ + ۱ = ۲۱$$

برای عدد ۱۳، چند نمایش مختلف در سیستم فوق وجود دارد؟

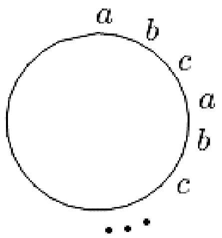
الف) ۱۲ ب) ۱۳ ج) ۱۴ د) ۱۵ هـ) ۱۶

۲۸- ۲۳ چوب کبریت به صورت روبه‌رو چیده شده‌اند. حداقل چند چوب کبریت باید برداریم تا هیچ مثلثی در شکل باقی نماند؟ (هر پاره‌خط کوچک در شکل یک چوب کبریت است.)



الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ هـ) ۹

۲۹- حروف a، b و c را مانند شکل به طور متناوب دور یک دایره چیده‌ایم. می‌دانیم که در مجموع ۴۸ حرف دور دایره قرار داده‌ایم. سپس از یکی از حروف a شروع کرده و در جهت عقربه‌های ساعت حروف را یک در میان حذف کنیم (خود اولین حرف نیز حذف می‌شود) تا در نهایت، دو حرف باقی بماند. این دو حرف به ترتیب نسبت به مبدأ، کدام دو حرف هستند؟



الف) اول a، بعد b ب) اول c، بعد a ج) اول c، بعد b د) اول a، بعد c هـ) اول b، بعد c

۳۰- ۲۰۰۰ بلوک ساختمانی هر یک به تنهایی بر روی زمین قرار دارند. می‌خواهیم برجی با قرار دادن همه‌ی این بلوک‌ها روی هم بسازیم. برای این کار تعداد نامحدودی جرثقیل داریم که می‌توانند به صورت هم‌زمان کار کنند. هر جرثقیل می‌تواند یک برج متشکل از یک یا چند بلوک را بر روی یک برج دیگر قرار دهد و یک برج جدید بسازد. اگر تعداد بلوک‌های برجی که توسط جرثقیل برداشته می‌شود کم‌تر یا مساوی ۱۰۰ باشد، این کار یک ساعت و در غیر این صورت دو ساعت طول می‌کشد. حداقل چند ساعت برای ساختن برج ۲۰۰۰ بلوکی لازم است؟

الف) ۱۱ ب) ۱۲ ج) ۱۳ د) ۱۴ هـ) ۱۵

M_1	M_2
M_3	M_4

۱	۰
۰	۱

۳۱- یک ماتریس M با درایه‌های صفر و یک و با ابعاد $2^n \times 2^n$ موجود است. S رشته‌ی متناظر با ماتریس M را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم: اگر کلیـه‌ی درایـه‌های M صفر باشد، $S=0$ و اگر کلیه درایه‌های M یک باشد، $S=1$. در غیر این صورت ماتریس را به چهـار ماتـریس مساوی M_1، M_2، M_3 و M_4 (مطابق ماتـریس بالا از شکـل روبه‌رو) تقسیممی‌کنیم. رشته‌ی $S_i (i=1,2,3,4)$ متناظر با ماتریس M_i را به دست می‌آوریم. سپس $S = 2S_1S_2S_3S_4$ برای مثال رشته‌ی متناظر ماتریس پایین از شکل روبه‌رو ۲۱۰۰۱ است. کدام یک از رشته‌های زیر ممکن است رشته‌ی متناظر یک ماتریس صفر و یک باشد؟

۱) ۲۰۲۲۱۱۱۰۱۱۱۱۱ ۲) ۲۱۱۲۰۰۲۰۰۰۰۰۱ ۳) ۲۰۱۰۲۱۰۲۱۰۱۰۱۰

الف) ۱ و ۳ ب) ۱ و ۲ ج) ۱ و ۲ و ۳ د) ۲ و ۳ هـ) هیچ‌کدام

۳۲- در سؤال قبلی چند رشته‌ی متناظر برای ماتریس‌های 16×16 وجود دارد؟

الف) 16^{64} ب) 2^{16} ج) 2^{64} د) 4^{256} هـ) 4^{16}

۳۳- پنج نفر به نام‌های احسان، حامد، حسین، شادی و الهام در تعدادی جلسه شرکت کردند. می‌دانیم تصادفاً در هر جلسه دقیقاً یک نفر غایب بوده است. الهام در ۵ جلسه شرکت کرد و حامد در ۸ جلسه. در ضمن می‌دانیم سه نفر دیگر هر یک در بیش از ۵ جلـســـه و کمتر از ۸ جلسه شرکت کرده‌اند. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سه نفر درست است؟

الف) هر سه در ۶ جلسه شرکت کرده‌اند.
ب) دو نفر در ۶ جلسه و یک نفر در ۷ جلسه شرکت کرده‌اند.
ج) دو نفر در ۷ جلسه و یک نفر در ۶ جلسه شرکت کرده‌اند.
د) هر سه در ۷ جلسه شرکت کرده‌اند.
هـ) اطلاعات داده شده برای حل مسئله کافی نیست.

۳۴- در دو گوشه‌ی متقابل یـک صفحه‌ی شطرنجی 2000×2000 دو مهره‌ی اسب قرار دارد. این دو مهـره به نوبت حرکـت می‌کنند. حرکت مهره‌ی اسب ۱ خانه در جهت عمودی یا افقی و ۲ خانه در جهت دیگر است. کم‌ترین مجموع تعداد حرکات لازم برای دو مهره چقدر است تا این دو مهره روی یک خانه قرار بگیرند؟

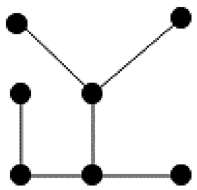
الف) ۱۳۳۰ ب) ۱۳۳۱ ج) ۱۳۳۲ د) ۱۳۳۳ هـ) ۱۳۳۴

۳۵- در جزیره‌یی فرد عجیبی زندگی می‌کند که در روزهای سه‌شنبه، چهارشنبه، پنج‌شنبه همه‌ی جمله‌هایی که می‌گوید دروغ است و در بقیه‌ی روزهای هفته همه‌ی جمله‌های او راست است. این فرد عجیب در چند روز از یک هفته می‌تواند جمله‌ی زیر را بگوید: «مـن هم دیروز دروغ گفتم و هم فردا»؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

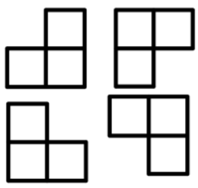
توجه کنید که سؤال‌های ۳۶ تا ۴۰ وجود ندارد و باید در پاسخ‌نامه سؤال‌های بله ـ خیر را از شماره‌ی ۴۱ علامت بزنید.

سؤالات بله ـ خیر

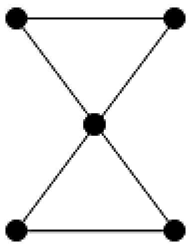


۳۶- نقشه‌ی شهرهای یک کشور در شکل روبه‌رو داده شده است. در این شکل هر دایره متـناظر یک شهر و پاره‌خط‌های بین آن‌ها متناظر جاده‌های بین این شهرهـاست. هر شهر دارای یک مخزن بنزین است. همـه‌ی این مخزن‌ها در ابتدا تهی هستند بجز یک شهر دلخواه به نام شـهر مبـدأ که مخزن آن ۳۰ لیتـر بنزیـن دارد، در هر شهر مبـدأ ماشینی قرار دارد که می‌تواند حداکثر ۳ لیتر بنـزین حمل کند، و برای رفتن از هر شهر به شهر مجاور یک لیـتر از این بنزین را مصرف می‌کند. ماشـین می‌تواند مقداری از بنزینی را که حمـل می‌کند در مخزن بنزین یک شهر خالی کند، یا از مخزن بنـزین آن شهر مقداری بنـزین برای حمل بردارد. آیا می توان با انتخاب شهر مبدأ مناسب ۳۰ لیـتر بنـزین موجود در مخزن آن شهر را به وسیله‌ی ماشین طوری بین شهرها پخش کرد که پس از بازگشت ماشین به شهر مبدأ، در مخزن بنزین هر شهر حداقل یک لیتر بنزین مانده باشد؟

۳۷- جایگشت (۶و۷و۵و۳و۴و۲و۱) از اعداد ۱ تا ۷ را در نظر بگیـرید. در هر مرحله می‌توانیم با داشـتن یک جایگشت، تعداد دلخـواهی از اعداد آخر آن را برداشـته، به اول آن منتقل کنیم و به جایگشت جدیدی برسیـم. مثلاً جایگـشت فوق با برداشتن ۳ عدد آخر و انتقال آن‌ها، به جایگشت (۳و۴و۲و۱و۶و۷و۵) تبدیل می‌شود. آیا می‌توان جایگشت فوق را با انجام تعداد دلخواهی از تبدیل‌های مذکور، سرانجام به جایگشت (۷و۶و۵و۴و۳و۲و۱) تبدیل کرد؟



۳۸- یک جدول $m \times n$ داریم $(m > ۲, n > ۲)$ که به صورت دلخواه در خانه‌های آن اعداد ۰ یا ۱ قرار داده‌ایم. در هر حرکت می‌توانیم به هر یک از سه خـانه‌ی این جـدول که تشکیل یکــی از اشـکال روبه‌رو را می‌دهند یک واحد اضـافه کنیم. آیا با حرکـاتی از نوع بالا می‌توانیم اعداد نوشته شده در تمام خانه‌های جدول را زوج کنیم؟



۳۹- یک کشور دارای چند شهر و چند جاده‌ی بین شهری است. در برنامه‌ی توسعه، دولت تصمیمی‌گیرد بین هر دو شهری که قبلاً با استفاده از دقیقاً دو جاده می‌شد از یکی به دیگری رفت، یک جاده تأسیس کند. مثلاً اگر یک کشور شامل سه شهر A، B، C و دو جاده‌ی $A - B$ و $B - C$ باشد. بعد از برنامه‌ی توسعه، بین شهرهای A و C هم جاده تأسیس می‌شود. فرض کنید کشوری دارای ۵ شهر باشد. آیا ممکن است بعد از برنامه‌ی توسعه، شکل شهرها و جاده‌های این کشور مطابق شکل مقابل باشد؟ (دایره‌های توپر نشانگر شهرها و خط‌های بین آن‌ها نشانگر جاده‌ها هستند.)

۴۰- ۹ نقطـه روی مـحـیـط یـک دایره قرار دارند. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند: هر بازیکن در نوبت خود دو نقطه که قبلاً به هم وصل نشده باشد را به هم متصل می‌کند، به طوری که وتر رسم شده وترهای قبلی را در داخل دایره قـطـع نـکند. آیا بازیـکن دوم می‌توانـد طوری بازی کند که حتماً برنده شود؟ (توجه کنید که از یک نقطه می‌توان چند وتر رسم کرد.)

۴۱- دنباله‌ی ۱۰، ۹، ۸، ۶، ۷، ۲، ۵، ۱، ۳ را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توانیم چهار عنصر متوالی دنباله را در نظر بگیریم و مکان زوج اول را با زوج دوم ایـن چـهـارتـایی عـوض کـنیـم. مثلاً از روی دنباله‌ی فوق و با در نظر گرفتن چهار عدد مجـاور ۷، ۲، ۵، ۱ می‌توان دنباله‌ی ۱۰، ۹، ۸، ۶، ۵، ۱، ۷، ۲، ۳ را به دست آورد. آیا با انجام تعداد دلخواهی از اعمال فوق می‌توان از دنباله‌ی بالا به دنباله‌ی ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ رسید؟

۴۲- دو نفر بازی زیر را با ظرفی که شامل ۱۳۷۸ عدد کشمش است انجام می‌دهد:
هـر بازیـکـن در نـوبـت خود می‌تواند ۱ یا ۳ یا ۵ کشمش بردارد. بازیکنی که اخرین کشمش (یا کشمش‌ها) را بردارد بازنده است. آیا بازیکن اول می‌تواند برنده‌ی این بازی شود؟

۴۳- در یک چند ضلعی ساده (نه لزوماً محدب) تمام قطرها را رسم کرده‌ایم و روی هر قطر تعداد اضلاعی که توسط آن قطر قطـع می‌شـود را نـوشــتـه‌ایم (یک قطر یک ضلع را وقتی قطع می‌کند که با آن نقطه‌ی مشترکی داشته باشد.) آیا همواره مجموع اعداد نوشــتـه شده روی قطرها زوج است؟

۴۴- دنباله‌ی ۱و ۰و۱و ۰و ۰و ۰و۱و۱و ۰ از اعداد صفر و یک را در نظر بگیرید. در هر مرحله یکی از دو عمل زیر را می‌توانیم انجام دهیم:
جای دو عنصر مجاور را با یکدیگر عوض کنیم.
سه عنصر متوالی را در نظر گرفته و مقدار هر سه را تغییر دهیم (از صفر به یک و از یک به صفر تبدیل کنیم.) می‌گوییم دنباله‌ی A از دنباله‌ی B کوچک‌تر است اگر به ازای هر رقم یک در A، رقم متناظر آن در B هم برابر یک باشد. آیا می توان با شروع از دنباله‌ی بالا و استفاده از اعمالی که گفته شد به دنباله‌ی ۰و۱و ۰و ۰و ۰و۱و۱و ۰و۱ رسید، به شرط اینکه دنباله‌هایی که در طول مسیر تولید می‌شوند، غیر قابل مقایسه باشند؟ (دو دنباله ی A و B قابل مقایسه‌اند اگر حداقل یکی از آن‌ها از دیگری کوچک‌تر باشد.)

۴۵- عدد $N = ۳۲۱۰۰۰...۰۰$ را با تعداد ارقام ۱۳۷۸ در نظر بگیرید. بر روی N عمل زیر را تکرار می‌کنیم: هر بار یک رقم دلخواه با مقدار k $(k > ۰)$ را انتخاب می‌کنیم، سپس آن رقم را صفر کرده و به k رقم بعدی از چپ به راست یک واحد اضافه می‌کنیـم. آیـا با کم‌تر از ۱۱ بار تکرارِ این عمل می‌توان تمام رقم‌های N را به صفر و یک تبدیل کرد؟

«پاسخ تشریحی دهمین المپیاد کامپیوتر»

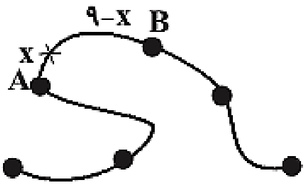
۱- در جدول زیر ● نشانگر مرخصی و × نشانگر روز کاری است:

علی	×	●	×	●	×	●	×	●	×	●	×	●
حسین	×	×	×	×	●	●	×	×	×	×	×	●
مجید	×	×	×	●	×	×	×	●	×	×	×	●
	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱

معلوم است که پس از یازده روز هر سه نفر در مرخصی به سر می‌برند.

۲- معلوم است که در هر مرحله مجموع اعداد روی دایره ثابت می‌ماند. در ابتدا مجموع کل اعداد برابر با $\frac{۷۸\times۷۹}{۲}$؛ یعنی ۳۰۸۱ می‌باشد. بنابراین این عدد، عدد نهایی است که در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده ۱ دارد.

۳- اگر پمپ بنزین در نقطه‌ای بین دو شهر A و B واقع باشد بهینه است. در این حالت y برابر با:
$x+(۱۰+x)+(۱۶+x)+(۹-x)+(۱۷-x)+(۲۴-x)$ یعنی ۷۶ می‌باشد



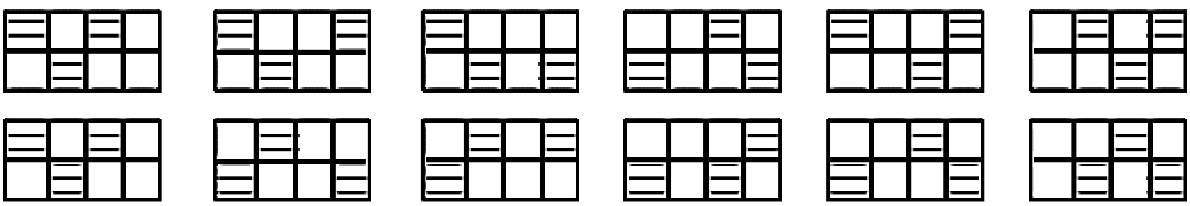
۴- به ازای هر سه نقطه متمایز یک و فقط یک مثلث ایجاد خواهد شد که آن مثلث سه زاویه کم‌تر از ۱۸۰° داشته و مجموع آن سه زاویه ۱۸۰° می‌باشد. بنابراین جواب مورد نظر برابر $۱۸۰^\circ\times\binom{۱۰}{۳}$؛ یعنی ۲۱۶۰۰ می‌باشد.

۵- تعداد حالاتی که صفر خانه علامت‌زده شده باشد برابر $\binom{۸}{۰}$ یعنی ۱ می‌باشد.

تعداد حالاتی که یک خانه علامت‌زده شده باشد برابر $\binom{۸}{۱}$ یعنی ۸ می باشد.

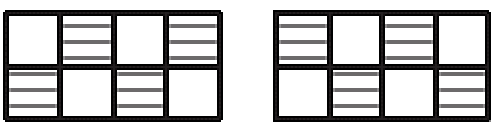
تعداد حالاتی که دو خانه علامت‌زده شده باشد برابر $\binom{۸}{۲}$ یعنی ۲۸ می‌باشد که در ده مورد خانه‌ها مجاور هستند و ۱۸ مورد از آن مطلوب می‌باشد.

تعداد حالاتی که سه خانه علامت‌زده شده مطلوب باشند برابر ۱۲ می‌باشد که به شکل زیر می‌باشد:



و بالاخره تعداد حالاتی که چهار خانه علامت‌زده شده باشند برابر ۲ می‌باشد که به شکل زیر می‌باشند:

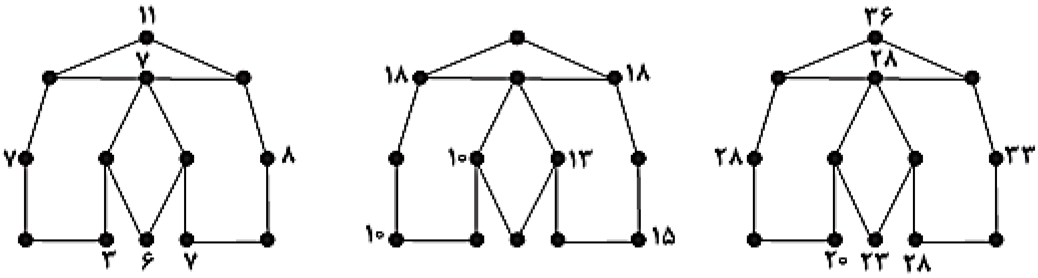
مجموع کل حالات اشاره شده ۴۱ می‌شود.



۶- اگر در یکی از نقاط سطر اول یا سوم باشیم معلوم است که حرکت بعدی به یک طریق و اگر در یکی از نقاط سطر دوم باشیم حرکت بعدی به دو طریق قابل انجام است. (به غیر از ستون دهم که به ناچار باید به پایین برویم.) یک در میان یعنی در حرکت‌های دوم، چهارم، ششم، هشتم و دهم در سطر دوم خواهیم بود که طبق اصل ضرب جواب مورد نظر برابر $1 \times 2^4 \times 1^6$ خواهد بود.

۷- ابتدا مریم دو عدد ۱۸ و ۳۶ را انتخاب می‌کند. اگر $x \lneqq 18$ $x = 36$ که مسئله حل است و اگر غیر این باشد x در یکی از بازه‌های [۱و۱۷] ، [۳۵و۱۹] ، یا [۳۷و۵۳] قرار دارد که هر یک از آن بازه‌ها دارای ۱۷ عضو بوده و شرایط یکسانی دارند. فرض می‌کنیم مهدی وجود x را در بازه‌ی اول اعلام کند، در این صورت مریم دو عدد ۶ و ۱۲ را انتخاب می‌کند. اگر $x \lneqq 6$ $x = 12$ که مسئله حل است و اگر غیر این باشد x در یکی از بازه‌های [۵و۱] ، [۱۱و۷] یا [۱۷و۱۳] قرار دارد که هر یک از آن بازه‌ها دارای ۵ عضو بوده و شرایط یکسانی دارند. فرض می‌کنیم مهدی وجود x را در بازه‌ی دوم اعلام کند، در این صورت مریم دو عدد ۸ و ۱۰ را انتخاب کرده و x را می‌یابد زیرا اگر $x \lneqq 8$ $x = 10$ که مسأله حل است و اگر غیر این باشد x یکی از سه عدد ۷، ۹ یا ۱۱ می‌باشد که مهدی آن را اعلام می‌کند.

۸- وضعیت اعداد موجود در شکل پس از سه مرحله انجام عمل ذکر شده به شکل زیر می‌باشد:



مرحلهٔ اول	مرحلهٔ دوم	مرحلهٔ سوم

همانطور که مشاهده می‌شود مجموع اعداد خواسته شده برابر ۲۸ + ۲۰ + ۲۳ + ۲۸؛ یعنی ۹۹ می‌باشد.

۹- بیش‌ترین امتیاز کسب شده برابر ۱۶۰ و کم‌ترین امتیاز کسب شده برابر ۴۰- می‌باشد. در بین همه اعداد صحیح از ۴۰- تا ۱۶۰ به غیر از ۱۵۹، ۱۵۸، ۱۵۷، ۱۵۴، ۱۵۳ و ۱۴۹ همگی قابل کسب هستند، بنابراین در کل به تعداد ۶ − ۲۰۱؛ یعنی ۱۹۵ امتیاز می‌توانیم داشته باشیم. برای آن که مطمئن شویم حداقل دو نفر امتیاز یکسان دارند وجود حداقل ۱۹۶ نفر لازم است.

۱۰- برای آن که تیم چهارم حداکثر امتیاز را کسب کند نتیجه بازی‌ها باید مطابق جدول زیر باشد که در این صورت آن تیم ۶ امتیازی می‌باشد.

	A	B	C	D	E
A		B	A	A	A
B	B		C	B	—
C	A	C		D	C
D	A	B	D		D
E	A	—	C	D	

و اما تیم چهارم نمی‌تواند ۷ امتیازی باشد زیرا در این صورت تیم سوم نیز علاوه بر دو تیم دوم و چهارم ۷ امتیازی خواهد بود که لازمه‌اش داشتن دو برد و یک تساوی توسط هر یک از تیم‌ها می‌باشد. بنابراین تیم اول سه برد، تیم‌های دوم، سوم و چهارم هر یک دو برد دارند که مجموعاً ۹ برد می‌شود. از طرف دیگر هر یک از سه تیم مورد اشاره یک تساوی دارند؛ یعنی نتیجه حداقل دو بازی نیز تساوی بوده است که در این صورت تعداد بازی‌ها بیش از ۱۰ بازی می‌شود و تناقض ایجاد می‌کند، زیرا تعداد کل بازی‌های انجام شده برابر ۱۰ می‌باشد.

۱۱- برنامه گزینه الف از چپ به راست:

$$ax^2 + bx + c = (a \times x + b) \times x + b$$
$$Add\ a, Mul\ x, Add\ b, Mul\ x, Add\ b$$

برنامه گزینه ب از چپ به راست:

$$(a+b)xy+ya=\left[(a+b)\times x+a\right]\times y$$
$$Add\ a, Add\ b, Mul\ x, Add\ a, Mul\ y$$

برنامه گزینه د از چپ به راست:

$$۳x^{۵}+۱=(((((۳\times x)\times x)\times x)\times x)\times x)+۱$$
$$Add\ x, Mul\ ۳, Mul\ x, Mul\ x, Mul\ x,, Mul\ x, Add\ ۱$$

گزینه ج را به صورت‌های اشاره شده نمی‌توان پرانتزگذاری کرد.

۱۲- می‌دانیم گزاره شرطی «اگر p آنگاه q» فقط وقتی ارزش نادرستی دارد که p درست و q نادرست باشد. بنابراین اگر در آن گزاره ارزش p نادرست باشد بدون توجه به ارزش q می‌فهمیم که ارزش کل گزاره درست است. p را مقدم و q را پیرو می‌نامند.
از دو گزاره الف و ب یکی درست می‌باشد، زیرا اگر ب نادرست باشد آنگاه گزاره شرطی الف به خاطر نادرست بودن مقدمش درست خواهد بود. گزاره ب نمی‌تواند درست باشد، زیرا در این صورت گزینه الف و هـ هر دو نادرست بوده (به خاطر این که فقط یکی از گزاره‌ها ارزش درست دارد) آنـگاه به خاطر نادرست بودن مقدم گزاره شرطی ج، آن گزاره شرطی ارزش درست خواهد داشت که تناقض است. بنابراین گزینـه مورد نظر که ارزش درستی دارد گزینه الف می‌باشد.

۱۳- هر عضو از آن ۱۰ عضو ۷ انتخاب زیر را مستقل از اعضای دیگر می‌تواند داشته باشد:

متعلق به هیچ یک از زیر مجموعه نباشد.

فقط متعلق به $A_۱$ باشد.

فقط متعلق به $A_۲$ باشد.

فقط متعلق به $A_۳$ باشد.

به $A_۱$ $A_۲$ متعلق بوده ولی به $A_۳$ متعلق نباشد.

به $A_۱$ $A_۳$ متعلق بوده ولی به $A_۲$ متعلق نباشد.

به $A_۲$ $A_۳$ متعلق بوده ولی به $A_۱$ متعلق نباشد.

بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالات ممکن برابر $۷^{۱۰}$ می‌باشد.

۱۴-

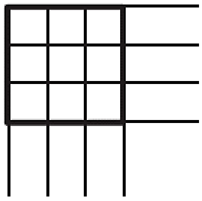
$$\begin{aligned}
&\overline{۷a_n\ldots a_۳a_۲a_۱} &&= ۵\times\overline{a_n\ldots a_۳a_۲a_۱۷} &&\Rightarrow a_۱=۵\\
\Rightarrow\ &\overline{۷a_n\ldots a_۳a_۲۵} &&= ۵\times\overline{a_n\ldots a_۳a_۲۵۷} &&\Rightarrow a_۲=۸\\
\Rightarrow\ &\overline{۷a_n\ldots a_۳۸۵} &&= ۵\times\overline{a_n\ldots a_۳۸۵۷} &&\Rightarrow a_۳=۲\\
\Rightarrow\ &\overline{۷a_n\ldots ۲۸۵} &&= ۵\times\overline{a_n\ldots ۲۸۵۷} &&\Rightarrow a_۴=۴\\
\Rightarrow\ &\overline{۷a_n\ldots ۴۲۸۵} &&= ۵\times\overline{a_n\ldots ۴۲۸۵۷} &&\Rightarrow a_n=۱
\end{aligned}$$

در مرحله بعد رقم قبل از یک برابر ۷ به دست می‌آید به همین منظور رقم ۷ موجود در سمت چپ عدد را که از قبل موجود بود رقم مورد نظر در نظر می‌گیریم. بنابراین a_n همان $a_۵$ می‌باشد. بنابراین عدد مورد نظر ۱۴۲۸۵۷ می‌باشد که یک عدد شش رقمی است.

۱۵- A و T را یار هم و C و G را نیز یار هم می‌نامیم. عضو اول ۴ حالت دارد. عضو دوم نمی‌تواند یار اولی باشد؛ یعنی ۳ حالت دارد. عضو سوم نمی‌تواند یار دومی باشد؛ یعنی این عضو نیز ۳ حالت می‌تواند داشته باشد و ... بنابراین تـعـداد حـالات مـمـکـن بـرابـر ۴×۳^{۹} می‌باشد. که متأسفانه در هیچ‌یک از گزینه‌ها نیامده است

۱۶- اعداد یک، سه، پنج رقمی ارزش مثبت و مابقی اعداد ارزش منفی دارند. تعداد ارقام دو رقمی، چهار رقمی و شش رقمی که ارزش منفی دارند به ترتیب برابر ۹۰، ۹۰۰ و ۹۰۰۰۰۰ می‌باشد که مجموع آن‌ها ۹۰۹۰۹۰ می‌شود.

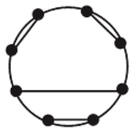
۱۷- یک جدول ۳×۳ از گوشه شبکه جدا می‌کنیم. هر یک از خانه‌های آن مستقل از دیگری دو حالت ۰ و ۱ می‌توانند داشته باشند، مابقی خانه‌ها وابسته به این که سه خانه موجود در سمت چپ یا بالای آنچه اعدادی باشند منحصر به فرد تعیین خواهند شد، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $۲^۹$؛ یعنی ۵۱۲ می‌باشد.



۱۸-

I.  معلوم است که در این حالت با توجه به متمایز بودن ۸ نقطه تعداد شکل‌های حاصل برابر ۲ می‌باشد.

II.  معلوم است که در این حالت با دوران وترها، به طوری که قیافه شکل عوض نشود و فقط نقاط تغییر کنند ۴ شکل حاصل خواهد شد.

III.  با دوران وترهای این شکل نیز ۸ شکل حاصل خواهد شد.

بنابراین مجموع حالات برابر $۸ + ۴ + ۲$؛ یعنی ۱۴ خواهد شد.

۱۹- شرط لازم و کافی برای آن که به عدد ۱ برسیم آن است که تعداد ۱های عدد اولیه فرد باشد که تعداد این اعداد $\binom{۱۰}{۱} + \binom{۱۰}{۳} + \dots + \binom{۱۰}{۹}$ یعنی $۲^۹$ می‌باشد.

۲۰- **راه حل اول:** اگر تعداد مهره‌ها ۶ باشدآنگاه به یک طریق می‌توان آن‌ها را چید.
اگر تعداد مهره‌ها ۵ باشد، آنگاه دو خانه غیر مجاور باید خالی بماند که به یکی از ۱۵ طریق زیر ممکن است:

۱-۴	۳-۶	۵-۸	۷-۱۰	۹-۱۲
۱-۶	۳-۸	۵-۱۰	۷-۱۲	
۱-۸	۳-۱۰	۵-۱۲		
۱-۱۰	۳-۱۲			
۱-۱۲				

اگر تعداد مهره‌ها ۴ عدد باشد انگاه ۴ خانه غیر مجاور باید خالی بمانند که به یکی از ۵ طریق زیر ممکن است:

۱_۴_۷_۱۰
۱_۴_۷_۱۲
۱_۴_۹_۱۲
۱_۶_۹_۱۲
۳_۶_۹_۱۲

مجموع کل حالات مورد اشاره برابر $5+15+1$؛ یعنی ۲۱ می‌باشد.

راه حل دوم: تعداد طرق چیدن مهره‌های 1×2 در جدول $n\times 1$ را f_n می‌نامیم. هر یک از f_n طریق دو حالت می‌تواند داشته باشد. به این صورت که یا خانه nام آن خالی است و یا پر. در حالت اول خانه‌های $(n-1)$ ام و $(n-2)$ام یقیناً پر هستند و از آن خانه به قبل نیز تعداد طرق چیدن‌ها برابر f_{n-3} می‌باشد. در حالت دوم نیز خانه $(n-1)$ ام یقیناً پر هست، بنابراین تعداد طرق چیدن مهره در سایر خانه‌ها برابر f_{n-2} می‌باشد، یعنی رابطه $f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$ بر قرار است. چون $f(1)=1$، $f(2)=1$ و $f(3)=2$، بنابراین با محاسبه، $f(12)$ برابر با ۲۱ به دست می‌آید.

۲۱- درجه هر رأس از گراف به تعداد درجه آن رأس در نوشتن A به کار می‌رود. بنابراین اگر درجه رئوس را a_1، a_2، ...، a_n در نظر بگیریم آنگاه خواهیم داشت:

$$A = a_1\times a_1 + a_2\times a_2 + \ldots + a_n\times a_n = \sum a_i^2$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که:

$$B = \sum a_i^2 + (\underbrace{2^2+2^2+\ldots+2^2}_{\text{۲۹ تا}})$$

$$\Rightarrow B - A = 29\times 4 = 116$$

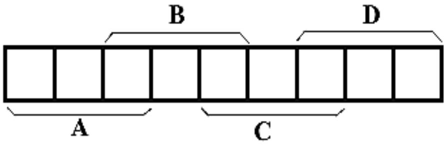
یادآوری می‌شود که تعداد یال‌های گراف داده شده برابر ۲۹ می‌باشد. همانطور که دیده می‌شود عدد به دست آمده در هیچ‌یک از گزینه‌ها نیامده است.

۲۲- معلوم است که کامیون از انبار ۱ که قرار است از حالت ABCD به حالت AAAA تبدیل شود، حداقل دوبار خارج و حداقل دوبار به آن انبار وارد خواهد شد. انبارهای ۲، ۳ و ۴ نیز چنین وضعیتی را دارند. بنابراین حداقل جابه‌جایی‌های لازم برابر $\frac{4+4+4+4}{2}$ یعنی ۸ می‌باشد. اگر کامیون با الگوریتم زیر حرکت کند با ۸ بار جابه‌جایی می‌تواند به هدف برسد:

a. بشکه‌های BC را از انبار ۱ به انبار ۲، منتقل کند.
b. بشکه‌های CC را از انبار ۲ به انبار ۳، منتقل کند.
c. بشکه‌های BD را از انبار ۳ به انبار ۴، منتقل کند.
d. بشکه‌های BB را از انبار ۴ به انبار ۲، منتقل کند.
e. بشکه‌های AD را از انبار ۲ به انبار ۱، منتقل کند.
f. بشکه‌های DD را از انبار ۱ به انبار ۴، منتقل کند.
g. بشکه‌های AC را از انبار ۴ به انبار ۳، منتقل کند.
h. بشکه‌های AA را از انبار ۳ به انبار ۱، منتقل کند.

۲۳- ادعا می‌کنیم تجزیه $13 = 4+3+6$ حالت بهینه است.
در بین گزینه‌ها گزینه بزرگتر از ادعای ما اعداد ۷۵ و ۸۰ می‌باشند که هر دو مضرب ۵ می‌باشند. اگر ۱۳ را به صورت $13 = 8+5$ تجزیه و سپس عدد ۸ را به صورت‌های دلخواه مانند $2+6$ یا $4+3+1$ یا $7+1$ تجزیه کنیم در همه حال حاصل ضرب به دست آمده از ۷۲ کم‌تر خواهد شد.

۲۴- بهترین حرکت ممکن به شکل مقابل می‌باشد که در این صورت حاصل ضرب مورد اشاره $2^4\times 3^4\times 4^4\times 5^1$ یعنی ۱۶۵۸۸۸۰ می‌باشد.



۲۵- معلوم است که باید در مرحله اول دو خانه از سه خانه A اعداد ۱ و ۲ باشند که تعداد طرق جا دادن آن دو رقم در سه خانه مورد اشاره $2! \times \left[\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right]$، یعنی ۶ می‌باشد. در مرحله دوم توجه داریم که در خانه خالیِ A و دو خانه سمت راست B باید دو عدد ۳ و ۴ موجود باشند که تعداد طرق جا دادن آن دو رقم در سه خانه مورد اشاره نیز برابر ۶ می‌باشد. در مرحله سوم می‌فهمیم که در خانه خالی باقی‌مانده از مراحل قبلی و دو خانه سمت راست C باید دو عدد ۵ و ۶ موجود باشند که تعداد طرق جا دادن آن دو رقم در سه خانه مورد اشاره نیز برابر ۶ می‌باشد. در مرحله آخر سه خانه خالی می‌ماند که باید سه عدد ۷، ۸ و ۹ را در آن سه خانه قرار دهیم که این عمل نیز به ۶ طریق ممکن است. بنابراین تعداد کل حالات برابر 6^4 یعنی ۱۲۹۶ می‌باشد.

۲۶- مراحل کار به شکل زیر می‌باشد:

۷, ۷, ..., ۷, ۷, ۷, ۷, ۷, ۷

پس از سه مرحله: ۷, ۷, ..., ۷, ۷, ۷, ۷, ۱۰, ۱

پس از چهار مرحله: ۷, ۷, ..., ۷, ۷, ۷, ۱۱, ۲, ۱

پس از پنج مرحله: ۷, ۷, ..., ۷, ۷, ۱۲, ۱, ۲, ۱

پس از پنج مرحله: ۷, ۷, ..., ۷, ۱۲, ۲, ۱, ۲, ۱

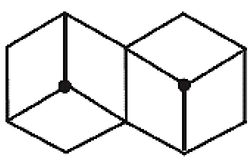
پس از پنج مرحله: ۷, ۷, ..., ۱۲, ۲, ۲, ۱, ۲, ۱

پس از پایان تمام مراحل: ۲, ۲, ..., ۲, ۲, ۲, ۱, ۲, ۱

$\Rightarrow$ کل مهره‌ها تعداد $= 98 \times 2 + 1 + 1 = 198$

۲۷- تمام حالات در جدول مقابل مشخص است، که مجموع آن‌ها برابر ۱۴ می‌باشد.

X	Y	V	U	I	تعدادحالات
۱	–	–	–	۳	۱
–	۱	–	۱	–	۱
–	۱	–	–	۴	۱
–	–	۲	–	۳	۱
–	–	۱	۲	–	۳
–	–	۱	۱	۴	۲
–	–	۱	–	۸	۱
–	–	–	۳	۱	۱
–	–	–	۲	۵	۱
–	–	–	۱	۹	۱
–	–	–	–	۱۳	۱



۲۸- با برداشتن هر چوب کبریت حداکثر دو مثلث از بین می‌روند، چون ۱۲ مثلث در شکل موجـود است پس برداشتن حداقل ۶ چوب کبریت الزامی اسـت. با برداشتن ۶ چوب کبریت مطابق شکل مقابل حذف همه مثلث‌ها امکان‌پذیر است.

-۲۹

پس از مرحلهٔ اول: b a c b a c … b a c

پس از مرحلهٔ دوم: a b c a b c a b c a b c

پس از مرحلهٔ سوم: b a c b a c

پس از مرحلهٔ چهارم: a b c

پس از مرحلهٔ آخر: b c

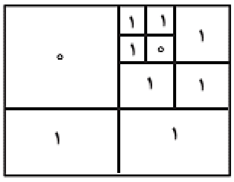
-۳۰ پس از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ ساعت ارتفاع بلندترین برج ساخته شده به ترتیب برابر ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴ و ۱۲۸ بلوک می‌باشد. در هشتمین ساعت می‌توان یک برج ۱۰۰ بلوکی را بر روی برج ۱۲۸ بلوکی قرار داده و برج ۲۲۸ بلوکی ساخت. بنابراین پس از گذشت ۸ ساعت بلندترین برج می‌تواند ۲۲۸ بلوک داشته باشد.

در نهمین ساعت نیز می‌توان یک برج ۱۰۰ بلوکی را بر روی برج ۲۲۸ بلوکی قرار داده و برج ۳۲۸ بلوکی ساخت. واضح است اگر پس از گذشت ۷ ساعت برج ۱۲۸ بلوکی را بر روی برج ۱۲۸ بلوکی دیگر قرار دهیم دو ساعت طول خواهد کشید که در این صورت در انتهای ساعت نهم طول بلندترین برج ۲۵۶ بلوک می‌باشد که برج ساخته شده به شیوه قبل که ۳۲۸ بلوک داشت بهینه می‌باشد.

برای ساختن برج بعدی به دو شیوه می‌توان عمل کرد یا در انتهای ساعت نهم یک برج ۱۰۰ بلوکی را در طول یک ساعت بر روی بلندترین برج ساخته شده یعنی برج ۳۲۸ بلوکی قرار داده و برج ۴۲۸ بلوکی به دست آورد، یا در انتهای ساعت هشتم یک برج ۲۲۸ بلوکی را در طول دو ساعت بر روی بلندترین برج ساخته شده یعنی ۲۲۸ بلوکی دیگر قرار داده و برج ۴۵۶ بلوکی به دست آورد که حالت دوم بهینه است. بنابراین در انتهای ساعت دهم بلندترین برج ساخته شده دارای ۴۵۶ بلوک خواهد بود.

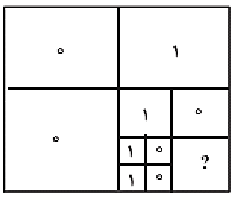
به همین ترتیب استدلال می‌شود که در انتهای ساعات ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۵ طول بلندترین برج می‌تواند به ترتیب ۶۵۶، ۹۱۲، ۱۳۱۲، ۱۸۲۴ و ۲۶۲۴ بلوک داشته باشد. بنابراین برای ساختن برجی به ارتفاع ۲۰۰۰ بلوک حداقل ۱۵ ساعت وقت لازم است.

-۳۱ ماتریس متناظر به رشته ۱ ماتریس مقابل می‌باشد



بعد از ۲، چهار عدد یکسان نمی‌تواند باشد، پس رشته ۲ ماتریس متناظر ندارد.

ماتریس متناظر به رشته ۳ نیز تا قبل از مرحله آخر به شکل مقابل می‌باشد که در مرحله آخر ۱۰ را نمی‌توان در خانه باقی‌مانده قرار داد:



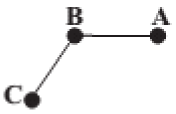
-۳۲ به ازای هر ماتریس یک و فقط یک رشته به‌دست می‌آید. بنابراین چون تعداد ماتریس‌ها برابر $۲^{۱۶\times۱۶}$ یا $۱۶^{۶۴}$ می‌باشد تعداد رشته‌ها نیز همین تعداد خواهد بود.

-۳۳ تعداد جلساتی که احسان، حسین و شادی در آن شرکت کرده‌اند را به ترتیب e، h و s می‌نامیم. با توجه به فرض معلوم می‌شود که هر یک از متغیرهای e، h و s یکی از دو عدد ۶ یا ۷ می‌توانند باشد. از طرف دیگر اگر تعداد کل جلسات تشکیل شده را k در نظر بگیریم، آنگاه چون هر جلسه متشکل از ۴ نفر می‌باشد بنابراین تساوی $۵+۸+e+h+s=۴k$ برقرار خواهد بود. با ساده کردن تساوی فوق و با در نظر گرفتن نابرابری $۱۸\leq e+h+s\leq ۲۱$ به تساوی $e+h+s=۱۹$ خواهیم رسید که معلوم می‌شود یکی از آن دو متغیر برابر ۷ و دوتای دیگر برابر ۶ می‌باشند.

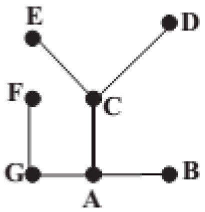
۳۴- در هر حرکت اسب از یک خانه‌ای به خانه‌ای غیر هم‌رنگ آن می‌رود. معلوم است که دو خانه متقابل موارد اشاره در جدول ۲۰۰۰×۲۰۰۰ هم‌رنگ می‌باشند (مثلاً سفید). اگر دو مهره همدیگر را در خانه‌ای هم‌رنگ با خانه‌های مبدأ ملاقات کنند آنگاه هر دو اسب به تعداد زوجی حرکت انجام داده‌اند که مجموع حرکاتشان زوج می‌شود. اگر دو مهره همدیگر را در خانه‌ای غیر هم‌رنگ با خانه‌های مبدأ ملاقات کنند، آنگاه هر دو اسب به تعداد فردی حرکت انجام داده‌اند که باز مجموع حرکتشان زوج می‌شود. بنابراین عدد خواسته شده عددی زوج است. دو اسب مجموعاً ۱۰۰۰ خانه در جهت افقی و ۱۰۰۰ خانه در جهت عمودی و مجموعاً ۲۰۰۰ واحد جابه‌جا می‌شوند و با هر حرکت اسب سه واحد جابه‌جایی اتفاق می‌افتد. بنابراین برای رسیدن به هدف حداقل $\left\lfloor \frac{۲۰۰۰}{۳} \right\rfloor$ یعنی ۱۳۳۳ حرکت لازم است که کوچک‌ترین عدد زوج بزرگ‌تر از ۱۳۳۳ عدد ۱۳۳۴ می‌باشد.

۳۵- آن فرد در روزهای سه‌شنبه و پنج شنبه می‌تواند جمله اشاره شده را بگوید.

۳۶- برای انتقال یک لیتر بنزین به مخزن شهر مجاور دو لیتر بنزین هدر می‌رود (یک لیتر برای رفت و یک لیتر برای برگشت). برای انتقال یک لیتر بنزین به مخزن شهری که با شهر مبدأ دو واحد فاصله دارد ۸ لیتر بنزین هدر می‌رود، زیرا اگر شهر مبدأ در شکل مقابل شهر A و شهر مقصد شهر C باشد، فاصله بین شهر A و B سه بار و فاصله بین B و C یک بار به صورت رفت و برگشت طی می‌شود تا از شهر A به شهر C یک لیتر بنزین منتقل شود.



به همین ترتیب ثابت می‌شود که برای انتقال یک لیتر بنزین به مخزن شهری که با شهر مبدأ سه واحد فاصله دارد ۲۶ لیتر بنزین هدر می‌رود. با این توضیحات معلوم می‌شود که بهترین شهر برای مبدأ شهر A می‌باشد که در این صورت برای انتقال یک لیتر بنزین به شهرهای B، C، D، E، F و G به ترتیب ۲، ۲، ۸، ۸، ۸، و ۲ لیتر بنزین هدر می‌رود که با بنزین‌های موجود در مخازن که باید حداقل یک لیتر در هر مخزن باشد مجموعاً ۳۷ لیتر می‌شود که از ۳۰ لیتر بیشتر است.

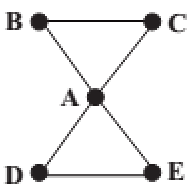


۳۷- عمل اشاره شده فقط جایگشت‌های دوری جایگشتِ داده شده را تولید می‌کند که جایگشت خواسته شده جزء آن‌ها نیست.

۳۸- زوجیت هر خانه از جدول را مستقل از خانه‌های دیگر می‌توان عوض کرد. به عنوان مثال برای تغییر زوجیت خانه a از جدول متقابل خانه‌های bac، acd و abd را به ترتیب انتخاب‌کرده و زوجیت خانه‌های هر دسته را تغییر می‌دهیم.

a	b
c	d

۳۹- از دو جاده AB و AC حداقل یکی (مانند AB) و از دو جاده AE و AD نیز حداقل یکی (مانند AE) قبل از طرح توسعه موجود بوده‌اند. بنابراین باید بعد از طرح توسعه جاده‌ای مانند BE تأسیس می‌شد که نشده است.

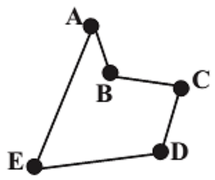


۴۰- در صورت سؤال تعریف نفر برنده مشخص نشده است.

۴۱- دنباله داده شده عدد ۴ را ندارد ولی دنباله مطلوب عدد ۴ دارد.

۴۲- بعد از بازی نفر اول تعداد کشمش‌های برداشته شده فرد و بعد از بازی نفر دوم تعداد کل کشمش‌های برداشته شده زوج می‌شود. چون ۱۳۷۸ زوج است بنابراین بازی توسط نفر دوم به اتمام می‌رسد و نفر اول برنده می‌شود.

۴۳- در پنج ضلعی زیر عدد روی قطر AD برابر ۵ و عدد موجود بر روی هر یک از سایر قطرها ۴ می‌باشد که مجموع کل آن‌ها فرد می‌شود.



۴۴- مراحل کار به شکل زیر می‌باشد:

$$\underline{\text{۰۱}}\text{۱۰۰۰۱۰۱} \rightarrow \text{۱۰۱۰۰۰۱}\underline{\text{۰۱}} \rightarrow \text{۱۰۱۰۰}\underline{\text{۰۱}}\text{۱۰}$$
$$\rightarrow \text{۱۰۱۰}\underline{\text{۰۱}}\text{۰۱۰} \rightarrow \text{۱۰۱}\underline{\text{۰۱}}\text{۰۰۱۰} \rightarrow \text{۱۰۱۱۰۰۰۱۰}$$

۴۵- مراحل کار به شکل زیر می‌باشد:.

$$\text{۳۲۱} \xrightarrow{\text{۱}} \text{۳۲۰۱} \xrightarrow{\text{۲}} \text{۳۲۰۰۱} \xrightarrow{\text{۳}} \text{۳۲۰۰۰۱}$$
$$\xrightarrow{\text{۴}} \text{۳۲۰۰۰۰۱} \xrightarrow{\text{۵}} \text{۳۰۱۱۰۰۱} \xrightarrow{\text{۶}} \text{۳۰۱۰۱۰۱}$$
$$\xrightarrow{\text{۷}} \text{۳۰۱۰۰۱۱} \xrightarrow{\text{۸}} \text{۳۰۰۱۰۱۱} \xrightarrow{\text{۹}} \text{۳۰۰۰۱۱۱}$$
$$\xrightarrow{\text{۱۰}} \text{۰۱۱۱۱۱۱}$$